МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР НА ВЕЛИКОТЪРНОВСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ
за ученици от 11 и 12 клас

ОТГОВОРИ и ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ

ТЕМА ЗА ПЪРВО РАВНИЩЕ
9 март 2008 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
б	б	в	г	в	б	а	б	г	в	б	в	а	а	г	а	в	г	г	в

ВТОРА ЧАСТ

1	2	3	4	5
$x \in (1;2)$	$x = 1$	$S_{11} = 44$	$R = 5$	$a = 12,\ b = 20$

ТРЕТА ЧАСТ

1	2	3
(1,2) и (2,1)	$x \in (-\infty;-5) \cup [1;\infty)$	$AB = \sqrt{13},\ BC = 2\sqrt{13},\ CA = 3\sqrt{5}$

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ на ТРЕТА ЧАСТ

1. Преобразуваме последователно дадената система

$$\left|\begin{array}{l} xy + x + y = 5 \\ x^2 + 3xy + y^2 = 11 \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} xy + x + y = 5 \\ (x+y)^2 + xy = 11 \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} xy + x + y = 5 \\ (x+y)^2 - (x+y) = 6 \end{array}\right.$$

Да положим $u = x + y$ и $v = xy$, така получаваме

$$\left|\begin{array}{l} u + v = 5 \\ u^2 - u = 6 \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} u = 3 \\ v = 2 \end{array}\right. \text{ или } \left|\begin{array}{l} u = -2 \\ v = 7 \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{array}\right. \text{ или } \left|\begin{array}{l} x + y = -2 \\ xy = 7 \end{array}\right.$$

Съгласно обратната теорема на Виет x и y са корени съответно на квадратните уравнения: $z^2 - 3z + 2 = 0$ и $z^2 + 2z + 7 = 0$

Първото уравнение има решения 1 и 2, от което получаваме две решения на системата: $(1,2)$ и $(2,1)$.

Второто няма реални корени, тъй като дискриминантата му $D = 4-28 = -24$ е отрицателна. Следователно в този случай не получаваме нови решения на системата.

Окончателно всички решения на системата са двете двойки числа: $\mathbf{(1,2)}$ и $\mathbf{(2,1)}$.

2. Разглеждаме първо случая когато уравнението е линейно, т. е. $2(m^2-1)=0 \Leftrightarrow m=\pm 1$.

При $m=-1$ получаваме уравнението $-8x+3=0$, което има решение $x=\dfrac{3}{8}$, а при $m=1$ получаваме $0x+3=0$, следователно при $m=1$ уравнението няма решение.

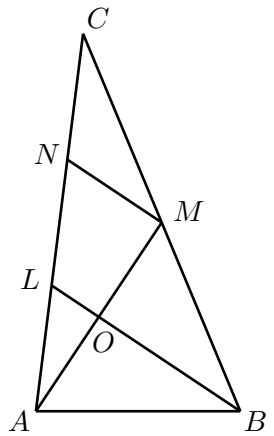
При $m \neq \pm 1$ уравнението е квадратно и условието да няма реални корени е еквивалентно на условието дискриминантата му да е отрицателна. За нея имаме $D=4(m-1)^2-2(m^2-1)3=2(2m^2-4m+2-3n^3+3)=2(-m^2-4m+5)$. Така трябва да решим неравенството $-m^2-4m+5<0 \Leftrightarrow m^2+4m-5>0$. Решенията на последното са $x \in (-\infty;-5) \cup (1;+\infty)$.

Окончателно получаваме, че даденото уравнение няма реални корени при
$\boldsymbol{x \in (-\infty;-5) \cup [1;+\infty)}$.

3. Нека пресечната точка на отсечките AM и BL е точка O. За $\triangle ABM$, BO е ъглополовяща и височина, следователно той е равнобедрен и $AO=MO=2$, както и $AB=BM=\dfrac{1}{2}BC$. Да построим отсечката MN, така че $N \in AC$ и $MN \| BL$. Тогава MN е средна отсечка за $\triangle BLC$, откъдето $MN=\dfrac{1}{2}BL=2$ и $LN=NC$. Отсечката OL е средна за $\triangle MNA$, от което получаваме $NL=LA$ и $OL=\dfrac{1}{2}MN=1$.

От правоъгълния $\triangle AOB$, следва $AB=\sqrt{AO^2+BO^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$, а от правоъгълния $\triangle AMN$ получаваме $AN=\sqrt{AM^2+MN^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

Окончателно за $\triangle ABC$ получаваме $\boldsymbol{AB=\sqrt{13},\ BC=2\sqrt{13}}$ и $\boldsymbol{CA=3\sqrt{5}}$.



ПРИМЕРНИ КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ ТРЕТА ЧАСТ

1. За преобразуване на системата до получаване на две квадратни уравнения – 10 т.
За решаване на двете уравнения – 5 т.

2. Разгледан случая, при който уравнението е линейно – 5 т.
Разгледан случая, при който уравнението е квадратно – 8 т.
Окончателно оформен краен резултат – 2 т.

3. За вярно пресметната дължина на всяка страна на триъгълника по 5 т.

В зависимост от начина на решаване на всяка от задачите от трета част, може да бъдат дадени точки и за междинни резултати.