Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

# Есенен математически турнир „Академик Стефан Додунеков“

**Велико Търново, 18-20 ноември 2022 г.**

**София, 2022 г.**

## Условия, кратки решения и критерии за оценяване

**Задача 8.1.** Решете уравнението

$$4x^2 + |9 - 6x| = |10x - 15| + 6(2x + 1).$$

*Отговор.* $x = 4$, $x = -1$.

*Решение. Първи метод.* Преобразуваме еквивалентно:

$$4x^2 - 6(2x + 1) = 5|2x - 3| - 3|3 - 2x|$$

$$2x^2 - 6x - 3 = |2x - 3|.$$

Понеже $|a|$ е винаги $a$ или $(-a)$, то решенията изпълняват $2x^2 - 6x - 3 = 2x - 3$ или $2x^2 - 6x - 3 = 3 - 2x$. В първия случай следва $2x(x - 4) = 0$, т.е. $x = 0$ или $x = 4$, а във втория случай $2(x - 3)(x + 1) = 0$, т.е. $x = 3$ или $x = -1$. Обаче $x = 0$ и $x = 3$ дават в началното уравнение $-3 = 3$, което е невярно, докато $x = -1$ и $x = 4$ наистина са решения (и двете страни са равни на 5).

*Втори метод.* Преобразуваме еквивалентно до

$$4x^2 - 12x - 6 = 2|2x - 3|.$$

Полагаме $u = |2x - 3| \geq 0$; тогава $u^2 = 4x^2 - 12x + 9$ и уравнението добива вида $u^2 - 15 = 2u$, което води до $(u - 5)(u + 3) = 0$. Вторият множител е положителен, така че трябва $u = 5$. Съответно $2x - 3 = 5$ води до $x = 4$, а $2x - 3 = -5$ води до $x = -1$.

**Оценяване.** (6 точки) 4 т. за намиране на 4, $(-1)$ и още най-много две други $x$, 2 т. за отхвърляне на излишните стойности.

**Задача 8.2.** Даден е правоъгълен триъгълник $ABC$ с прав ъгъл при върха $C$ и лице $S$. Нека $S_1$ е лицето на кръга с диаметър $AB$ и $k = \dfrac{S_1}{S}$.

а) Да се намерят острите ъгли на $ABC$, ако $k = 2\pi$.

б) Да се докаже, че не съществува $ABC$, за който $k = 3$.

*Решение.* Ако $AB = c$ и $h$ е височината към $AB$, то $S = \frac{ch}{2}$, $S_1 = \frac{\pi c^2}{4}$ и $k = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{c}{h}$. Нека $m = \frac{c}{2}$ е дължината на медианата към хипотенузата.

а) При $k = 2\pi$ следват $c = 4h$ и $m = 2h$. От правоъгълния триъгълник с хипотенуза $m$ и катет $h$ следва, че ъгълът между медианата и хипотенузата е $30°$, следователно острите ъгли на $ABC$ са $15°$ и $75°$.

б) От правоъгълния триъгълник с хипотенуза $m$ и катет $h$ имаме $m \geq h$. Така $\frac{c}{h} \geq 2$ и значи $k \geq \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \pi > 3$.

**Оценяване.** (6 точки) 2 т. за а), от които 1 т. за $c = 4h$ и 1 т. за довършване (не се отнемат точки, ако свойството на правоъгълен триъгълник с ъгъл $15°$ се цитира като известен факт); 4 т. за б), от които: 1 т. за изразяване на $k$ чрез $c$ и $h$, 1 т. за въвеждането на $m$, 1 т.

за $m \geq h$ и 1 т. за довършване; алтернативно: 1 т. за изразяване на $k$ чрез катетите $a$ и $b$ на $ABC$, 1 т. за твърдението $\frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2$ и 1 т. за доказателство, 1 т. за довършване.

**Задача 8.3.** По окръжност са разположени в този ред точките $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$, ..., $A_9$, $B_9$. Всяка от отсечките $A_iB_j$ $(i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 9)$ трябва да се оцвети в един от $k$ дадени цвята, така че никои две едноцветни отсечки не се пресичат във вътрешна точка и за всяко $i = 1$, ..., 9 има цвят, за който в този цвят няма отсечки с край $A_i$, нито с край $B_i$. Намерете най-малкото възможно $k$.

*Отговор.* 9

*Решение.* Отсечките $A_1B_5$, $A_2B_6$, $A_3B_7$, $A_4B_8$, $A_5B_9$, $A_6B_1$, $A_7B_2$, $A_8B_3$ и $A_9B_4$ се пресичат във вътрешни точки, така че са необходими поне 9 цвята. Толкова са и достатъчни: може в цвят $i$ да са отсечката $A_{i+1}B_i$ (навсякъде при $i = 9$ пишем 1 вместо $i+1$) и всички отсечки с край $A_i$ освен $A_iB_{i-1}$ (при $i = 1$ пишем 9 вместо $i-1$). По този начин никоя от отсечките с край $A_i$ и/или $B_i$ не е в цвят $i+1$.

*Забележка.* Дадената задача е формализация на следната постановка: на кръстовище излизат 9 двупосочни улици с дясно движение; всяка улица се пресича от пешеходна пътека точно до кръстовището. Има светофарна уредба, осигуряваща зелен сигнал за преминаване от всяка улица по най-краткия път към всяка улица, включително обратен завой към самата нея, както и за преминаване по всяка пешеходна пътека. Такт наричаме период от време, за който множество от зелени сигнали за автомобили и/или пешеходци не се променя и маршрутите им не се пресичат. Намерете най-малкия възможен брой тактове (всяко платно може да бъде разделено на достатъчен брой ленти за автомобилите отиващи/идващи към/от различни улици).

*Забележка.* По подобен начин (с лека модификация на доказателството на оценката при четно $n$) можем да докажем, че отговорът в горната задача в случая на $n$ улици ($n \geq 3$) е $n$.

**Оценяване.** (7 точки) 3 т. за доказателство, че са необходими поне 9 цвята, 4 т. за работеща схема с 9 цвята.

**Задача 8.4.** Да се намери броя на редиците от 2022 естествени числа, такива че във всяка редица:

- всяко число след първото е по-голямо или равно на предходното,
- поне едно от числата е равно на 2022 и
- сумата на всеки 2020 от числата се дели на всяко от останалите две.

*Отговор.* 13

*Решение.* Нека сумата на числата е $S$ и $a$, $b$ и $c$ са кои да е три от тях. Явно $S-a-b$ и $S-a-c$ се делят на $a$, откъдето $a$ дели $b-c$. Сега ако изберем $a$ да е число с най-голяма стойност измежду всички, неравенството $a \leq |b-c|$ няма как да бъде изпълнено и така горната делимост дава непременно $b = c$. Следователно всяка от търсените 2022-орки непременно има вида $(n, n, \ldots, n, a)$. Вече исканото е еквивалентно на делимостите $a \mid 2020n$ и $n \mid 2019n + a$, т.е. $n \mid a \mid 2020n$ – значи търсените са от вида $(n, n, \ldots, n, kn)$ където $k$ е делител на 2020 и поне едно от $n$ и $kn$ е равно на 2022.

Ако $n = 2022$, то понеже $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$ има $(2+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1) = 12$ делителя, имаме 12 възможности.
Ако $kn = 2022$ и $n \neq 2022$, то $k > 1$ дели 2020 и 2022, значи дели 2, т.е. единствената възможност е $k = 2$ и $n = 1011$.

**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за верен отговор; 2 т. за $a \mid b - c$ за произволни $a$, $b$, $c$; 1 т. за разглеждане на максимален елемент; 1 т. за свеждането до вида $(n, n, \ldots, n, kn)$ за $k \mid 2020$; по 1 т. за $n = 2022$ и $kn = 2022$.

**Задача 9.1.** Дадено е уравнението

$$x^2 + mx + 2022 = 0.$$

а) Да се намерят стойностите на реалния параметър $m$, за които уравнението има две решения $x_1$, $x_2$, които са *естествени* числа.
б) Да се намери сумата от всички стойности на $m$, при които уравнението има две *целочислени* решения.

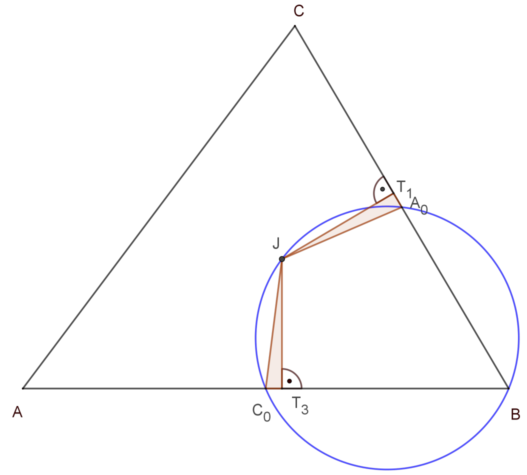
*Решение.* **Отговор: а)** $m = -343, -677, -1013, -2023$**; б)** $0$**.**
а) По формулите на Виет $x_1 + x_2 = -m$, $x_1x_2 = 2022$. Положителните множители на 2022 са $1, 2, 3, 6, 337, 674, 1011, 2022$, така че възможните суми $x_1 + x_2$ са $1 + 2022 = 2023$, $2 + 1011 = 1013$, $3 + 674 = 677$, $6 + 337 = 343$, следователно $m = -2023, -1013, -677, -343$.

б) За намиране на целочислени решения е необходимо или $x_1, x_2 > 0$, или $x_1, x_2 < 0$, тъй като $x_1x_2 = 2022$. Следователно, получаваме същите двойки $x_1, x_2$ като по-горе, но с отрицателен знак, и получаваме $m = 2023, 1013, 677, 343$. Сумата на всички възможни стойности на $m$ е 0.

**Оценяване.** (6 точки) а) 1 т. за множителите на 2022; 1 т. за формулите на Виет; 2т. за $m = -2023, -1013, -677, -343$; б) 2 т.

**Задача 9.2.** Даден е триъгълник $ABC$, за който $BC = 13$, $CA = 14$, $AB = 15$. Да се докаже, че върхът $B$, центърът на вписаната в триъгълника окръжност $J$ и средите на страните $AB$ и $BC$ лежат на една окръжност.

*Решение.* Нека означим $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Имаме, че $d = b - a = c - b = 1$ и значи $2b = a + c$.
Последователно получаваме $BT_3 = BT_1 = p - b = \dfrac{a + c - b}{2} = \dfrac{b}{2}$, $C_0T_3 = BC_0 - BT_3 = \dfrac{c - b}{2} = \dfrac{d}{2}$, $T_1A_0 = BT_1 - BA_0 = \dfrac{b - a}{2} = \dfrac{d}{2}$ или $C_0T_3 = T_1A_0$.
Сега от $JT_3 = JT_1 = r$ и $C_0T_3 = T_1A_0$ следва,че правоъгълните $\triangle JT_3C_0$ и $\triangle JT_1A_0$ са еднакви по първи признак и $\sphericalangle C_0JT_3 = \sphericalangle A_0JT_1 = \varphi$ или $\sphericalangle C_0JA_0 = \sphericalangle T_3JT_1 = \sphericalangle T_3JA_0 + \varphi$.
Тъй като $\sphericalangle T_3JT_1 + \sphericalangle T_3BT_1 = 180^\circ$, то $\sphericalangle C_0JA_0 + \sphericalangle C_0BA_0 = 180^\circ$ , което е достатъчно да твърдим, че точките $C_0$, $B$, $A_0$ и $J$ лежат на една окръжност.
*Забележка:* Окръжността, определена от точката $B$ и средите на страните $AB$ и $BC$ е с диаметър $OB$, където точка $O$ е центърът на описаната, около триъгълника окръжност.




**Оценяване.** (6 точки) 2 т. за $BT_3 = BT_1 = b/2$; 1 т. $C_0T_3 = T_1A_0$ 2 т.; 1 т. за $\triangle JT_3C_0 \cong \triangle JT_1A_0$ и 2 т. за довършване.

**Задача 9.3.** Да се намерят всички двойки естествени числа $a, b \geq 1$, които удовлетворяват уравнението

$$a! + 1 = (a+1)^{(2^b)}.$$

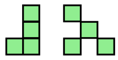
*Решение.* **Отговор:** $a = 4, b = 1$.

Ако $a+1$ е съставно, то има прост множител $p < a+1$, така че $p \mid a!$, следователно $p \mid 1$: противоречие! Следователно, $a+1 = p$ е просто число. Непосредствена проверка показва, че при $p = 5$, $a = 4, b = 1$, и че за $p = 2, 3, 7$ няма решение, следователно $p \geq 11$.
Ако пренапишем уравнението като

$$(p-1)! = p^{(2^b)} - 1 = (p^{(2^{b-1})}+1)(p^{(2^{b-1})}-1) = \cdots = (p^{(2^{b-1})}+1)(p^{(2^{b-2})}+1)\dots(p^2+1)(p+1)(p-1)$$

и съкратим множителя $p-1$, наблюдаваме, че $3^{\lfloor \frac{p-2}{3} \rfloor} \mid (p-2)!$, следователно тази степен на 3 дели и дясната страна (това не е най-високата степен на 3, която дели $(p-2)!$, но е достатъчна за нашите цели). За $k \geq 1$, $p^{(2^k)} \equiv 1 \pmod 3$, следователно никой от множителите от вид $p^{(2^k)} + 1$ не се дели на 3, освен $p+1$. Следователно, $3^{\lfloor \frac{p-2}{3} \rfloor} \mid (p+1)$ и $3^{\lfloor \frac{p-2}{3} \rfloor} \leq p+1$. Това противоречи на неравенството $3^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} > n+3$ за $n \geq 11$, което лесно може да се докаже по индукция или като се начертаят графиките на $3^x$ и $x+5$.
Алтернативно, нека $\ell \in \mathbb{N}$ е точната степен на тройката, която дели $p+1$ (т.е., $3^\ell \mid (p+1)$, но $3^{\ell+1} \nmid (p+1)$). Тогава $3^1, 3^2, \dots, 3^{\ell-1}$ са сред множителите в $(p-2)!$ и трябва $\ell(\ell-1)/2 = 1 + 2 + \cdots + \ell - 1 \leq \ell$. Следователно $\ell \leq 3$. Не може $\ell = 3$, защото тогава $(p-2)!$ има множители $3, 6, 9$ и значи $3^4 \mid (p-2)!$. Оттук $\ell \leq 2$, $3^3 \nmid (p-2)!$ и $9 > p-2$. Отново $p < 11$.
**Оценяване.** (7 точки) 1 т. аргумента, че $a+1$ е просто; 1 т. за намиране на решението; 2 т. за разлагането; 2т. за аргумент $3^{\lfloor \frac{p-2}{3} \rfloor} | p+1$; 1 т. за неравенството $3^{\lfloor \frac{p-2}{3} \rfloor} \geq p+1$.

**Задача 9.4.** Дадена е квадратна решетка с размер 2022 на 2022. Имаме право да поставяме по едно топче в четири клетки, които образуват фигура 1 (всички ориентации в равнината са позволени), или да премахваме по едно топче от четири клетки, които образуват фигура 2 (отново всички ориентации в равнината са позволени).



Фиг.1 Фиг.2

За кои $k$ е възможно в даден момент във всяка клетка да има точно $k$ топчета?

*Решение.*

Нека разположим квадратната решетка със страна 2022 в началото на първи квадрант и да означим всяка единична клетка с координатите на нейния долен ляв ъгъл. Нека в клетките, които имат четна координата по $y$ запишем числото 5, а в клетките, които имат нечетна координата по $y$ - числото 1. Сега да отбележим че и фигура 1 и фигура 2 покриват клетки или със стойност 8, или със стойност 16. Т.е. независимо, дали прибавяме или премахваме топчета, общата стойност на клетките в които го правим(броена с кратностите на броя топчета в тях) ще се дели на 8.

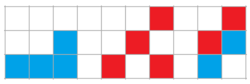
Да, но общата стойност на клетките в квадрата е

$$\frac{2022^2}{2} \cdot 5 + \frac{2022^2}{2} \cdot 1$$

Това число не се дели на 8 и следователно не бихме могли да сложим по нечетен брой топчета във всяка клетка.

Ще покажем че можем да сложим по равен брой топчета за всяко четно число. Достатъчно е да покажем, че можем да сложим по две топчета. За това пък е достатъчно е да докажем, че можем да сложим по две топчета във всяка клетка на квадрат 2 на 2. Действително, фигура 1 покрива правоъгълник 4 на 2. Така можем да поставим по две топчета във всяка клетка на квадрата със страна 2022, оставяйки празен само квадрат 2 на 2 в центъра.

Нека разгледаме следната комбинация от слагане и махане на топчета. Виждаме че можем ефективно да преместим две диагонални топчета на едно квадратче встрани.



Фигура 1: Наставяме слагане и махане, така че да получим конфигурацията вдясно

Сега лесно можем от правоъгълник 4 на 2, с по едно топче във всяка клетка, да стигнем до квадрат 2 на 2, с по две топчета във всяка клетка. Да разгледаме такъв правоъгълник, като с числата в клетките ще означаваме броя на топчетата в тях. Последователно можем да направим следните премествания:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 2 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 1 |
| 0 | 1 | 2 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 3 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 2 | 2 |
| 0 | 0 | 2 | 2 |

Така имаме квадрат със страна 2 и по 2 топчета във всяка клетка. Следователно можем да имаме квадрат със страна 2022 и по 2 топчета във всяка клетка, а значи - и с по $2k$ топчета във всяка клетка.

**Оценяване.** (7 точки) За намиране на подходящ инвариант на покритията (обикновено чрез числа или цветове за всяка клетка)- 3 точки. За правилно довършване на доказателството, че не можем да имаме квадрат с нечетно количество топчета във всяка клетка - 1 точка. За показване че можем да имаме по четно количество топчета във всяка клетка - 3 точки.

**Задача 10.1.** Да се реши ирационалното уравнение:

$$3\sqrt{3x-1} = x^2+1.$$

*Решение.* **Отговор:** $x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Даденото уравнение има смисъл при $x \geqq \dfrac{1}{3}$. Нека въведем ново неизвестно $t = \sqrt{3x-1} \geqq 0$. Тогава ирационалното уравнение е еквивалентно на следната система:

$$\left|\begin{array}{l} t \geqq 0 \\ t^2 = 3x-1 \\ 3t = x^2+1 \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left|\begin{array}{l} t \geqq 0 \\ 3x = t^2+1 \\ 3t = x^2+1 \end{array}\right. \qquad (*).$$

$\Big($ За решенията на тази система ще бъде изпълнено и $x \geqq \dfrac{1}{3}$. $\Big)$

Сега след почленно изваждане на двете уравнения на системата $(*)$ последователно получаваме $3(x-t) = t^2 - x^2$, $(x-t)(3+x+t) = 0$, т.е. $x = t$ или $x+t+3 = 0$.

Следователно системата $(*)$ е еквивалентна на обединението на двете системи

$$\left|\begin{array}{l} t \geqq 0 \\ x = t \\ 3t = x^2+1 \end{array}\right. \qquad (**) \qquad \text{и} \qquad \left|\begin{array}{l} t \geqq 0 \\ x+t+3 = 0 \\ 3t = x^2+1 \end{array}\right. \qquad (***).$$

След заместване на $t = x$ във второто уравнение на (**) достигаме до $x^2 - 3x + 1 = 0$, чиито решения са $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \geqq 0$ или $x_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \geqq 0$. Така получаваме, че решенията на (**) са $\left| \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ t_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array} \right.$ или $\left| \begin{array}{l} x_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ t_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array} \right.$ .

Заместваме $t = -3 - x$ във второто уравнение на $(***)$ и свеждаме до $x^2 + 3x + 10 = 0$, което няма реални корени, т.е. системата (***) също няма реални корени.

Сега окончателно получаваме, че решенията на ирационалното уравнение $3\sqrt{3x-1} = x^2+1$ $\big($системата $(*)\big)$ са $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ или $x_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

**Оценяване.** (6 точки) 1 точка за дефиниционното множество. 1 точка за полагането. 1 точка за $x = t$ и $x + t + 3 = 0$ и достигане до (**) и (***). 2 точки за намиране на решенията на (**) и (***). 1 точка за окончателен отговор.

Алтернативно: (6 точки) За трансформиране на уравнението в полином от четвърта степен и разлагането му на два квадратни полинома - 4 точки. За решаване на всеки от квадратните полиноми - по 1 точка.

**Задача 10.2.** Даден е триъгълник $ABC$ и произволна вътрешна точка $M$ такава, че $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MBC$. Точка $N$ е симетрична на $M$ спрямо средата на страната $AB$. Да се докаже, че сумата $MA \cdot MB + MC \cdot NC$ не зависи от положението на точката $M$.

*Решение.* Нека $P$ е симетрична на $N$ спрямо средата на $BC$, а средите на $AB$ и $BC$ да са съответно $C_1$ и $A_1$. Тогава $A_1C_1$ е средна отсечка както за $\triangle ABC$, така и за $\triangle MNP$, т.е., $AMPC$ е успоредник, а $\sphericalangle CPM = \sphericalangle CAM = \sphericalangle CBM$ и значи $MBPC$ е вписан. Аналогично, $NBPC$ също е успоредник. От Теоремата на Птоломей и равенствата между съответните елементи в успоредниците, получаваме

$$MB \cdot CP + MC \cdot BP = MP \cdot BC \quad \Longrightarrow \quad MB \cdot MA + MC \cdot NC = AC \cdot BC,$$

което не зависи от положението на точката $M$ а единствено от дължините на страните $AC$ и $BC$.

**Оценяване.** (6 точки) 1 т. за разглеждане на точка $P$; по 1 т. за всеки от успоредниците $AMPC$, $NBPC$; 1 т. за $MBPC$ – вписан; 1 т. за теорема на Птоломей и 1т. за довършване.

**Задача 10.3.** Съществува ли естествено число $n$, такова че числото $3^n + 1$ да притежава делител от вида $24\ell + 20$?

*Решение.* **Отговор: Не.**

*Първи начин.* Да допуснем противното. Тъй като $24\ell + 20 = 4(6\ell + 5)$, то $4 \mid 3^n + 1$ и значи $n = 2k + 1$ трябва да е нечетно.

**Лема (Туе):** Нека $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$ и $(a, n) = 1$. Тогава съществуват цели $x, y \in \mathbb{Z}$, за които $1 \leq x \leq [\sqrt{n}]$, $1 \leq |y| \leq [\sqrt{n}]$ и $ax + y \equiv 0 \pmod{n}$.

*Доказателство:* Да разгледаме числата от вида $ax+y$, където $x, y$ приемат независимо стойностите $0, 1, \ldots, [\sqrt{n}]$. Всички числа от този вид са общо $([\sqrt{n}]+1)^2 > n$ и значи съществуват $x_1, x_2, y_1, y_2$ такива, че $ax_1 + y_1 \equiv ax_2 + y_2 \pmod n$. Ако $x_1 = x_2$, то $n \mid y_1 - y_2$ и значи $y_1 = y_2$ – противоречие. Аналогично, ако $y_1 = y_2$, то $n \mid a(x_1 - x_2)$ и от $(a, n) = 1$ отново $x_1 = x_2$ – противоречие. Следователно $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$. Ако $x_1 > x_2$, то $x := x_1 - x_2$ и $y = y_1 - y_2$ изпълняват всички ограничения в лемата.
Да се върнем на задачата. Числото $6\ell+5$ има прост делител $p = 6r+5$. Тъй като $(3^k, p) = 1$ от Лемата на Туе следва, че съществуват цели $1 \leq |x|, |y| \leq [\sqrt{p}] < \sqrt{p}$ за които

$$3^k x + y \equiv 0 \pmod p \implies 3^{2k} x^2 \equiv y^2 \pmod p \implies -x^2 \equiv 3^n x^2 \equiv 3y^2 \pmod p.$$

Оттук $p \mid x^2 + 3y^2$. Но $x^2 + 3y^2 < 4p$. Разглеждайки всеки от останалите три случая, получаваме:

- $p = x^2 + 3y^2 \equiv 0, 1 \pmod 3$. Противоречие с $p = 6r + 5 \equiv 2 \pmod 3$.
- $2p = x^2 + 3y^2 \equiv 0, 1, 3 \pmod 4$. Противоречие с $2p = 12r + 10 \equiv 2 \pmod 4$.
- $3p = x^2 + 3y^2$. Тогава $x = 3x_0$ и отново $p = 3x_0^2 + y^2 \equiv 0, 1 \pmod 3$. Противоречие.

*Второ решение.* Понеже 4 дели $24\ell+20$, то дели и $3^n+1$ и значи $n$ е нечетно. Така $24\ell+20$ дели $(3a)^2+3$, където $a = 3^{\frac{n-1}{2}}$. Числото $6\ell+5$ е нечетно и значи има прост делител $p \equiv 5 \pmod 6$ – остава да обосновем, че не е възможно такъв да дели $k^2+3$. Един начин е чрез известния факт, че $(-3)$ не е квадратичен остатък по модул прости числа от този вид (това се проверява лесно и със закона за квадратичната реципрочност, заедно с факта, че $(-1)$ е квадратичен остатък точно когато $p \equiv 1 \pmod 4$). Друг подход е следният – понеже $p$ е нечетно, можем да считаме, че $k$ е нечетно (иначе работим с $k_0^2+3$, където $k_0 = k - p$), съответно при $k = 2z+1$ следва $4(z^2+z+1) \equiv 0 \pmod p$, т.е. $z^2+z+1 \equiv 0 \pmod p$. Оттук непременно $z^3 \equiv 1 \pmod p$ и $z^{p+1} \equiv 1 \pmod p$. Сега малката теорема на Ферма довежда до $z^2 \equiv 1 \pmod p$, откъдето $z \equiv \pm 1 \pmod p$, съответно $0 \equiv z^2+z+1 \equiv 1, 3 \pmod p$, противоречие.
**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за нечетно $n$; 2 т. за $p | x^2+3y^2$; 2 т. за $x^2+3y^2 < 4p$ и 2 т. за довършване. За второто решение: 1 т. за нечетно $n$, 2 т. за $p | k^2+3$, 2 т. за използването на факта, че $-3$ не е квадратичен остатък по модул $p \equiv 5 \pmod 6$ и 2 т. за доказателство (позволено е да се използва закона за квадратична реципрочност без доказателство).

**Задача 10.4.** Зоологическите градини в Европа, във всяка от които живеят по точно 100 вида животни, са разделени на две групи $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ по такъв начин, че всяка двойка зоологически градини $(A, B)$, $(A \in \widehat{A},\ B \in \widehat{B})$ се грижат за животно от един и същи вид.
Да се докаже, че клетките на животните (всички животни от даден вид живеят в една клетка) могат да бъдат оцветени в 3 цвята, така че във всяка зоологическа градина има поне две разноцветни клетки.

*Решение.* Ще докажем по-общата задача: Нека $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ са две фамилии от $k-$елементни множества, такива, че всяко $a \in \widehat{A}$ пресича всяко $b \in \widehat{B}$, $k \geq 3$. Тогава елементите на

$\widehat{A} \cup \widehat{B}$ могат да се оцветят в три цвята без да има едноцветно множество. *Доказателство:* Да разгледаме такава двойка от множества $a \in \widehat{A}, b \in \widehat{B}$, за която $|a \cup b|$ е минимално. Да изберем произволни елементи $v_a \in a \setminus b$ и $v_b \in b \setminus a$, които да оцветим в цвят 1. Нека оцветим $a \cup b \setminus \{v_a, v_b\}$ в цвят 2 и останалите елементи в цвят 3. Лесно се съобразява, че това оцветяване изпълнява условието на задачата.
*Забележка.* Задачата е вярна и за неравномощни множества, стига всяко от множествата да е с поне 3 елемента.

**Оценяване.** (7 точки) 2 т. за избор на минимална двойка, 2 т. за конструкция и 3 т. за доказателство, че конструкцията работи.

**Задача 11.1.** Дадено е уравнението $x^2 - 2px + q^2 + q - 2 = 0$, където $p$ и $q$ са реални параметри. Да се намерят стойностите на параметъра $q$, при които уравнението има поне един корен в интервала $(-1; 0)$ за всяка неотрицателна стойност на параметъра $p$.

*Решение.* Нека за някои стойности на $p$ и $q$ уравнението има два реални корена $x_1$ и $x_2$ в $(-1; 0)$. Тогава $2p = x_1 + x_2 < 0$, което е противоречие. Следователно трябва да намерим тези стойности на $q$, за които уравнението има точно един реален корен в $(-1; 0)$ за всяко $p \geq 0$. Това е изпълнено тогава и само тогава, когато $f(0) < 0$ и $f(-1) > 0$ за всяко $p \geq 0$. Оттук $q^2 + q - 2 < 0$ и $q^2 + q - 1 + 2p > 0$ за всяко $p \geq 0$.
Първото неравенство е изпълнено при $q \in (-2, 1)$, а второто неравенство е изпълнено за всяко $p \geq 0$ само при $q^2 + q - 1 > 0$, т.е.

$$q \in \left(-\infty; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \infty\right).$$

Следователно

$$q \in \left(-2; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; 1\right).$$

**Оценяване.** (6 точки) 1 т. за отхвърляне на случая и двата корена да са в интервала $(-1; 0)$; 1 т. за свеждане до $f(0) < 0$ и $f(-1) > 0$; 1 т. за решаване на $f(0) < 0$; 2 т. за решаване на $f(-1) > 0$ и 1 т. за крайния резултат.

**Задача 11.2.** Върху симетралата на отсечка $AB$ са избрани точки $P$ и $Q$, като $AP > AQ$ и точките $A$, $Q$, $B$ и $P$ лежат на една окръжност. Нека $M$ е произволна точка от отсечката $AB$. Правата през $M$, успоредна на $BQ$ пресича правата $AP$ в точка $R$. Правата през $M$, успоредна на $AQ$ пресича правата $BP$ в точка $S$. Да се докаже, че правата $MQ$ минава през средата на отсечката $RS$.

*Решение.* Тъй като $P$ и $Q$ са от симетралата на отсечката $AB$ и $A$, $Q$, $B$ и $P$ лежат на една окръжност, то $PA = PB$, $QA = QB$ и $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle PBQ = 90^\circ$. Нека $\sphericalangle MAQ = \sphericalangle MBQ = \alpha$. Достатъчно е да докажем, че $S_{RMQ} = S_{SMQ}$ защото тогава височините от $R$ и $S$ към $MQ$ ще бъдат равни, което означава, че $MQ$ разполовява $RS$. Равенството $S_{RMQ} = S_{SMQ}$ е еквивалентно на

$$RM \sin \sphericalangle RMQ = SM \sin \sphericalangle SMQ \iff \frac{RM}{SM} = \frac{\sin \sphericalangle SMQ}{\sin \sphericalangle RMQ}.$$

Тъй като $\sphericalangle RAM = \sphericalangle SBM = 90^\circ + \alpha$ и $\sphericalangle RMA = \sphericalangle SMB = \alpha$, то $\triangle RMA \sim \triangle SMB$. Следователно $\dfrac{RM}{SM} = \dfrac{AM}{BM}$ и трябва да докажем, че

$$\frac{AM}{BM} = \frac{\sin \sphericalangle SMQ}{\sin \sphericalangle RMQ} \iff \frac{AM}{\sin \sphericalangle SMQ} = \frac{BM}{\sin \sphericalangle RMQ}.$$

От $MS \parallel AQ$ и $MR \parallel BQ$ следва, че $\sphericalangle SMQ = \sphericalangle AQM$ и $\sphericalangle RMQ = \sphericalangle BQM$.
От синусовата теорема за $\triangle AQM$ и $\triangle BQM$ имаме:

$$\frac{AM}{\sin \sphericalangle SMQ} = \frac{AM}{\sin \sphericalangle AQM} = \frac{AQ}{\sin \sphericalangle AMQ} = \frac{BQ}{\sin \sphericalangle BMQ} = \frac{BM}{\sin \sphericalangle BQM} = \frac{BM}{\sin \sphericalangle RMQ},$$

с което доказателството е завършено.

**Оценяване.** (6 точки) 1 т. за $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle PBQ = 90^\circ$; 1 т. за свеждане на задачата до $S_{RMQ} = S_{SMQ}$; 1 т. за $\dfrac{RM}{SM} = \dfrac{\sin \sphericalangle SMQ}{\sin \sphericalangle RMQ}$; 1 т. за подобието $\triangle RMA \sim \triangle SMB$; 1 т. за прилагане на синусовата теорема за $\triangle AQM$ и $\triangle BQM$; 1 т. за довършване на решението.

**Задача 11.3.** Естественото число $n$ се нарича „интересно“ ако за него са изпълнени следните свойства:

- $n = p^{2\alpha} q^{2\beta} r^{2\gamma}$, където $p$, $q$ и $r$ са прости числа, $p < q$, а $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ са естествени числа;
- $|r - pq| = 1$;
- числата $p^{2\alpha} - 1$, $q^{2\beta} - 1$ и $r^{2\gamma} - 1$ са делители на $n$.

Да се намери най-голямото интересно число.

*Решение.* Тъй като $r = pq \pm 1$, то $r$ е най-големият прост делител на $n$. Тогава $r$ е нечетно и $r^{2\gamma} - 1$ е четен делител на $n$, откъдето $p = 2$. Понеже $2^\alpha$ не се дели на 3, то едно от числата $2^\alpha - 1$ и $2^\alpha + 1$ се дели на 3. Тъй като $2^{2\alpha} - 1 = (2^\alpha - 1)(2^\alpha + 1)$ дели $n$, то $n$ се дели на 3 и следователно $q = 3$.
От $r = pq \pm 1$ получаваме $r = 5$ или $r = 7$.
Тъй като $2^\alpha - 1$ и $2^\alpha + 1$ са взаимнопрости и $2^{2\alpha} - 1 = (2^\alpha - 1)(2^\alpha + 1) = 3^x.r^y$, то $2^\alpha - 1 = 3^y$ или $2^\alpha + 1 = 3^y$. Решенията на първото уравнение са $\alpha = 1, y = 0$ и $\alpha = 2, y = 1$, а на второто $\alpha = 1, y = 1$ и $\alpha = 3, y = 2$. Следователно $\alpha = 1, 2, 3$.
Аналогично, тъй като най-големият общ делител на $3^\beta - 1$ и $3^\beta + 1$ е 2, то $3^\beta - 1 = 2^x$ или $3^\beta + 1 = 2^x$. Както по-горе тези уравнения имат решение при $\beta = 1, 2$.
Следователно $\alpha = 1, 2, 3$ и $\beta = 1, 2$ и $r = 5, 7$, което дава следните възможности за $n$:

$$2^2.3^2.r^{2\gamma}, 2^4.3^2.r^{2\gamma}, 2^6.3^2.r^{2\gamma}, 2^2.3^4.r^{2\gamma}, 2^4.3^4.r^{2\gamma}, 2^6.3^4.r^{2\gamma}.$$

Да отбележим, че когато $2\alpha = 4$ имаме $2^4 - 1 = 15$ дели $n$ и следователно $r = 5$, а когато $2\alpha = 6$ имаме $2^6 - 1 = 63$ дели $n$ и следователно $r = 7$.
Тъй като $r^{2\gamma} - 1$ е делител на $2^{2\alpha}.3^{2\beta}$, то $r^{2\gamma} - 1 \le 2^{2\alpha}.3^{2\beta}$. Във всеки от горните 6 случая с директна проверка за $r = 5$ и $r = 7$ и стойности на $\gamma$, за които $r^{2\gamma} - 1 \le 2^{2\alpha}.3^{2\beta}$, получаваме следните решения:

$$2^2.3^2.5^2, 2^4.3^2.5^2, 2^4.3^4.5^2, 2^6.3^2.7^2.$$

Измежду тях най-голямо е $2^4.3^4.5^2 = 180^2 = 32400$.

**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за $p = 1$; 1 т. за $q = 3$; 1 т. за $2^\alpha - 1 = 3^y$ или $2^\alpha + 1 = 3^y$ с извода $\alpha = 1, 2, 3$; 1 т. за $3^\beta - 1 = 2^x$ или $3^\beta + 1 = 2^x$ с извода $\beta = 1, 2$; 1 т. за $r^{2\gamma} - 1 \le 2^{2\alpha}.3^{2\beta}$; 2 т. за намиране на всички решения и определяне на най-голямото измежду тях; при пропускане на едно или две решения се отнема 1 точка.

**Задача 11.4.** На дъската е записано числото 2022. Иван и Петър играят следната игра, като Иван е първи. На всеки свой ход Иван хвърля зар, събира полученото на зара число $a$ със записаното на дъската число $b$ и замества $b$ с остатъка на $(a + b)^2$ при деление на 5. На всеки свой ход Петър хвърля зар, събира полученото на зара число $a$ със записаното на дъската число $b$ и замества $b$ с остатъка на $a + b$ при деление на 3. Който от двамата запише на дъската 0, печели и играта завършва. Да се намери вероятността Иван да спечели играта.

*Решение.* Тъй като квадратичните остатъци по модул 5 са 0, 1 и 4, Иван или печели или записва едно от числата 1 или 4. Следователно Иван или печели, или записва $1 \pmod 3$. Петър или печели, или записва 1 или 2, което е 1 или $2 \pmod 5$.
Да означим с $p_i, i = 1, 2$ вероятността Иван да спечели, когато на дъската е записано число $i$, а с $q$ вероятността Петър да спечели, когато на дъската е записано число $1 \pmod 3$. Тъй като $2022 \equiv 2 \pmod 5$, то търсим $p_2$.

От условието следва, че $a$ може да бъде всяко число $1, 2, 3, 4, 5, 6$ с вероятност $\frac{1}{6}$.
При $b = 1$ Иван печели при $a = 4$. При $a = 1, 2, 3, 5, 6$ Иван записва на дъската $1 \pmod 3$ и тогава той печели с вероятност $1 - q$ (защото Петър печели с вероятност $q$).
При $b = 2$ Иван печели при $a = 3$. При $a = 1, 2, 4, 5, 6$ Иван записва на дъската $1 \pmod 3$ и тогава той печели с вероятност $1 - q$ (защото Петър печели с вероятност $q$). Следователно:

$$p_1 = p_2 = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}(1 - q) \tag{1}$$

При $b = 1$ Петър печели при $a = 2$ и 5. При $a = 3, 6$ Петър записва на дъската 1 и тогава той печели с вероятност $1 - p_1$ (защото Петър печели с вероятност $p_1$).
При $a = 1, 4$ Петър записва на дъската 2 и тогава той печели с вероятност $1 - p_2$ (защото Петър печели с вероятност $p_2$). Следователно:

$$q = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(1 - p_1) + \frac{1}{3}(1 - p_2) \tag{2}$$

От (1) и (2) получаваме $q = \frac{3}{4}, p_1 = p_2 = \frac{3}{8}$.

Следователно вероятността Иван да спечели е $p_2 = \dfrac{3}{8}$.

**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за наблюдението, че Иван записва $1 \pmod 3$; 1 т. за въвеждане на $p_i, i = 1, 2$ и $q$; 2 т. за (1); 2 т. за (2); 1 т. за решаване на системата и получаване на отговора.

**Задача 12.1.** Нека $x+y+z = 1$, $x^2+y^2+z^2 = 2$ и $x^3+y^3+z^3 = 3$. Да се намери стойността на израза $A = x^5 + y^5 + z^5$.

*Решение.* Нека $x, y, z$ са корени на полинома от трета степен $P(t) = t^3 + at^2 + bt + c = (t-x)(t-y)(t-z)$. Тогава по формулите на Виет имаме $a = -(x+y+z) = -1$, $b = xy+yz+zx$, $c = -xyz$.

От равенството $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ получаваме $1^2 = 2 + 2b$, т.е. $b = -\dfrac{1}{2}$.

Нека означим с $S_k = x^k + y^k + z^k$ степенните сборове. Имаме $S_0 = 3$, $S_1 = 1$, $S_2 = 2$, $S_3 = 3$. Сега от формулата на Нютон $S_{k+3} + aS_{k+2} + bS_{k+1} + cS_k = 0$ (формулата се получава след умножаване на всяко от равенствата $x^3+ax^2+bx+c = 0, y^3+ay^2+by+c = 0, z^3+az^2+bz+c = 0$ съответно с $x^k$, $y^k$, $z^k$ и почленното им събиране) при $k = 0$ имаме $3+(-1)\cdot 2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot 1+c\cdot 3 = 0$, т.е. $c = -\dfrac{1}{6}$. Така последователно получаваме $S_4 = S_3 + \dfrac{1}{2}S_2 + \dfrac{1}{6}S_1 = 3 + \dfrac{1}{2}\cdot 2 + \dfrac{1}{6}\cdot 1 = \dfrac{25}{6}$, $S_5 = S_4 + \dfrac{1}{2}S_3 + \dfrac{1}{6}S_2 = \dfrac{25}{6} + \dfrac{1}{2}\cdot 3 + \dfrac{1}{6}\cdot 2 = \dfrac{25+9+2}{6} = 6$.

**Оценяване.** (6 точки) 2 т. за свеждане до полином от трета степен с нули $x, y, z$; 2 т. за намиране на коефициентите на полинома; 2 т. за намиране на $A$.

**Задача 12.2.** Във вътрешността на равнобедрен правоъгълен триъгълник $ABC$ с хипотенуза $AB$ е избрана точка $M$, така че $MA = 5$, $MB = 7$ и $MC = 4\sqrt{2}$. Да се намери големината на ъгъл $\sphericalangle AMC$.

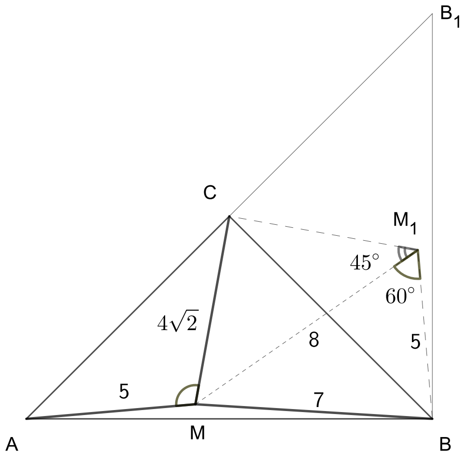
*Решение.* Нека да разгледаме ротация с център точка $C$ на ъгъл $+90^\circ$. Тогава образите на точките $A$, $B$ и $M$ при тази ротация ще бъдат съответно $A_1 \equiv B$, $B_1$ и $M_1$. Понеже триъгълникът $MM_1C$ е правоъгълен и равнобедрен, то $MM_1 = \sqrt{2}\ CM = 8$ и $\sphericalangle AMC = 45^\circ$. Така в триъгълника $MM_1B$ имаме $MB = 7$, $BM_1 = AM = 5$ и $MM_1 = 8$, т.е. от косинусовата теорема получаваме $\sphericalangle MM_1B = 60^\circ$. Сега за търсения ъгъл окончателно получаваме $\sphericalangle AMC = \sphericalangle BM_1C = \sphericalangle MM_1C + \sphericalangle MM_1B = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$.

**Оценяване.** (6 точки) 4 т. за построяване на конструкция, в която даденият ъгъл е сума на два известни ъгъла; 2 т. за намиране на ъгъла.

**Задача 12.3.** Редицата $a_n$ е зададена чрез $a_1 \geq 2$ и рекурентната връзка

$$a_{n+1} = a_n\sqrt{\frac{a_n^3+2}{2(a_n^3+1)}}$$

за $n \geq 1$. Да се докаже, че за всяко естествено число $n$ е в сила неравенството $a_n > \sqrt{\frac{3}{n}}$.




*Решение.* Да забележим, че равенството е еквивалентно на

$$\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} = \frac{a_n}{a_n^3 + 2}. \quad (*)$$

От СА-СГ следва, че $\frac{a_n}{a_n^3+2} \leq \frac{1}{3}$. Така получаваме $\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} \leq \frac{1}{3}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, което след сумиране дава $\frac{1}{a_n^2} \leq \frac{n-1}{3} + \frac{1}{a_1^2} < \frac{n}{3}$, откъдето получаваме желания резултат.

**Оценяване.** (7 точки) 3 т. за $(*)$, 1 т. за $\frac{a_n}{a_n^3+2} \leq \frac{1}{3}$, 1 т. за $\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} \leq \frac{1}{3}$ и 2 т. за довършване.

**Задача 12.4.** Зоологическите градини в Европа, във всяка от които живеят поне два вида животни, се разделят на две групи $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ по такъв начин, че всяка двойка зоологически градини $(A, B)$ ($A \in \widehat{A}$, $B \in \widehat{B}$) се грижат за животно от един и същи вид.
В колко най-малко цвята $k$ могат да бъдат оцветени клетките на животните (всички животни от даден вид живеят в една клетка), така че във всяка зоологическа градина има поне две разноцветни клетки? Да се намери най-голямата стойност на $k$ и всички възможности (зоологически градини и животни), за които тази най-голяма стойност на $k$ се достига.

*Решение.* Ще разгледаме по-общата задача: Нека $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ са две фамилии от множества, такива че всяко $a \in \widehat{A}$ пресича всяко $b \in \widehat{B}$.
Ако съществуват $b_1, b_2 \in \widehat{B}$, такива, че, $b_1 \subset b_2$, то е достатъчно да разгледаме $\widehat{B} \setminus b_2$ и аналогично за $\widehat{A}$. Ако обаче съществуват $b \in \widehat{B}$ и $a \in \widehat{A}$, такива, че $a \subset b$, то хроматичното число може да бъде произволно голямо. Наистина, нека $\widehat{B}$ съдържа само едно множество с $n$ елемента, а $\widehat{A}$ съдържа всички двуелементни подмножества на $\widehat{B}$. Тогава, очевидно хроматичното число ще е $n$.
Ако никое множество не съдържа изцяло друго множество, то максималното $k$, за което можем да оцветим всеки от елементите в един от $k$ цвята така, че да няма едноцветно множество, е 4, и то се достига единствено в следния случай (с точност до размяна на $\widehat{A}$ и

$\widehat{B}$): $\widehat{B} = \{b_1, b_2\}$, такова, че $b_1 \cap b_2 = \emptyset$, $\widehat{A}$ е пълният двуделен граф между елементите на $b_1$ и $b_2$ (съдържа всички $\{u, v\}$, където $u \in b_1$, $v \in b_2$). Наистина, за всяко $b_1, b_2$ ни трябват по два цвята, а от пълнотата на двуделния граф и липсата на едноцветно ребро, тези цветове трябва да са различни, т.е. $k \geq 4$. От друга страна, по какъвто и начин да оцветим в по два различни цвята $b_1, b_2$, очевидно няма едноцветно множество нито в $\widehat{A}$, нито в $\widehat{B}$.
Съгласно забележката под задача 10.4, ако няма множество с точно два елемента, то $k \leq 3$. Да означим с $H$ обединението от всички елементи, които се срещат в множество от $\widehat{A}$ или $\widehat{B}$ и нека $E(H)$ е съвкупността от всички множества, всяко от които принадлежи на $\widehat{A}$ или $\widehat{B}$.

**Лема** Нека $a = \{u, v\} \in \widehat{A}, u \in b \in \widehat{B}$. Тогава, за всяко $w \in b$ или $\{v, w\} \in \widehat{A}$, или $k \leq 3$.
*Доказателство:* Да допуснем, че $k > 3$. Тогава за всяко $w \in b$ има множество $\{w, v\} \in E(H)$, иначе оцветяваме $v, w$ в цвят 1, елементите на $b \setminus w$ в цвят 2 и всички други в цвят 3, което води до $k \leq 3$ и доказва лемата.

Без ограничение на общността считаме $\{u, v\} \in \widehat{A}$. Без ограничение на общността има множество $b \in \widehat{B}$, което съдържа $u$. От лемата следва, че $\{v, w\}$ принадлежи на $E(H)$ за всяко $w \in b$. Сега разглеждаме два случая.

*Случай 1.* Съществува $w \in b$ такова че $\widehat{B}$ съдържа $\{v, w\}$. Тогава от лемата (за $a = \{u, v\}$ и $b = \{v, w\}$) имаме $\{u, w\} \in E(H)$, значи $b = \{u, w\}$. Съответно $H$ съдържа множеството $\{u, v, w\}$, което от своя страна съдържа поне едно множество от $\widehat{A}$ и поне едно множество от $\widehat{B}$ ($\star$).
Ако $H$ съвпада с $\{u, v, w\}$, то очевидно $\chi(H) = 3$. Иначе, $H$ съдържа множество $e$ което не пресича поне едно от $\{u, v\}, \{u, w\}, \{v, w\}$. Така можем да сменим означенията както следва: $\{u, v, w\} = \{q, r, s\}$, като $e, \{q, r\} \in \widehat{B}$ и $e \cap \{q, r\} = \emptyset$. Отбелязваме, че поне едно от множествата $\{q, s\}, \{r, s\}$ принадлежи на $\widehat{A}$ (без ограничение на общността това е $\{q, s\}$). От лемата (за $a = \{q, s\}$ и $b = e$) $E(H)$ съдържа $\{q, t\}$ за всяко $t \in e$. Ако $\{r, s\} \in \widehat{B}$, то за всяко $t \in e \setminus s$ имаме $\{q, t\} \in \widehat{B}$. Така от лемата (за $a = \{q, s\}$ и $b = \{q, t\}$) имаме множеството $\{s, t\} \in E(H)$, откъдето $e = \{s, t\}$ и $H$ съответства на пълен граф с 4 върха, оттук и $k = 4$. Ако $\{r, s\} \in \widehat{A}$, то отново от лемата (за $a = \{r, s\}$ и $b = e$) има множество $\{r, t\}$ за всяко $t \in e$. Обобщавайки, имаме множествата $\{q, r\}$, $e \in \widehat{B}$, $\{q, s\} \in \widehat{A}$ и $\{x, t\} \in E(H)$ за всяко $x \in \{q, r\}$ и $t \in e$. Можем да считаме $|e| > 2$, значи има различни $s, t_1, t_2 \in e$. Отбелязваме, че $\{r, t_1\} \in \widehat{A}$ понеже $\{q, s\} \in \widehat{A}$, така $\{q, t_2\} \in \widehat{A}$. Следователно за всяко $x \in \{q, r\}$ и $t \in e$, $\widehat{A}$ съдържа множеството $\{x, t\}$. Явно всяко множество от съвкупността или пресича едновременно $\{q, r\}$ и $e$ (тогава съвпада с $\{x, t\}$, където $x \in \{q, r\}$ и $t \in e$) или съдържа едно от тях (тогава съвпада с $\{q, r\}$ или $e$). Също, няма цвят, който се среща едновременно в $\{q, r\}$ и $e$, значи отново имаме $k = 4$.

*Случай 2.* Всички множества $\{v, w\}$, където $w \in b$, се съдържат в $\widehat{A}$. Ако $|\widehat{B}| = 1$, то $k > 3$, значи има множество $b' \in \widehat{B}$, което не съдържа $u$. Да допуснем, че $b \cap b' = \emptyset$. Тогава за всяко $w \in b$ и $t' \in b'$ от лемата (за $a = \{v, w\}$ и $b'$) непременно имаме $\{w, t'\}$ в $E(H)$. Явно всички тези са в $\widehat{A}$, иначе сме готови от първия случай (ако някое $\{w, t'\} \in \widehat{B}$, то $\{w, v\} \in \widehat{A}$, $\{w, t'\}$, $b' \in \widehat{B}$). Значи, $H$ има структурата, описана в началото.

От друга страна, ако $b \cap b' \neq \emptyset$, то от лемата за $a = \{u, v\}$ и $b$ имаме множество $\{v, t\}$ за някое $t \in b \cap b'$. Тогава $b' = \{v, t\}$. Аналогично, $b = \{u, t\}$. Така условието $(\star)$ е изпълнено и сме готови.

**Оценяване.** (7 точки) 3 т. за случая $a \subset b$, 4 т. за случая, когато никое множество не е подмножество на друго.

**Задачите са предложени от:** 8.1, 8.3 – Ивайло Кортезов; 8.2, 8.4 – Мирослав Маринов; 9.1, 9.3 – Милен Иванов; 9.2, 12.1, 12.2 – Веселин Гушев; 9.4, 10.1 – Константин Делчев; 10.2, 10.3 – Александър Иванов; 10.4, 12.4 – Данила Черкашин; 11.1 – Аделина Чопанова; 11.2, 11.3, 11.4 – Емил Колев; 12.3 – Кристиян Василев.