МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР НА ВЕЛИКОТЪРНОВСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ
за ученици от 11 и 12 клас

ТЕМА ЗА ВТОРО РАВНИЩЕ
9 март 2008 г.

Задача 1 *Да се докаже тъждеството* $2\operatorname{cotg} 2\alpha = \operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha$. *Да се пресметне сумата*

$$S_n = \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{и границата } \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Задача 2 *Дадено е уравнението*

$$x^4 + (1-2a)x^3 + (a^2-2a+2008)x^2 + (a^2-2008a+2008)x - 2008a = 0,$$

където a *е реален параметър.*

а) Докажете, че уравнението има поне два реални корена.

б) Намерете всички стойности на a*, за които уравнението има четири различни реални корена.*

в) Намерете всички стойности на a*, за които уравнението има точно три различни цели корена.*

Задача 3 *Даден е тъпоъгълен* $\triangle ABC$ *с тъп ъгъл при върха* C*, за който* $AB = 1$ *и вътрешните ъгли при върховете* A, B *са с мерки съответно* $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle B = 45^\circ$. *Медианата* AA_1 *и височината* CC_1 *се пресичат в точка* P.

а) Да се намери лицето S *на четириъгълника* AC_1A_1C *и да се докаже, че*

$$S < \frac{3}{16}.$$

б) Да се намерят отношенията, в които точка P *дели диагоналите на* AC_1A_1C.

Задача 4 *Върху всяка от страните на правилен* $2n$*-ъгълник* $A_0A_1\ldots A_{2n-1}$ *с дължина на страната 1 по произволен начин са избрани по* n *различни точки* $(n \geq 2)$*, като от тях няма съвпадаща с връх на многоъгълника.*

а) Да се намери най-малкият възможен брой трапци с върхове измежду дадените точки.

б) Нека S *е сумата от лицата на всички трапци с основи върху страните* A_kA_{k+1} *и* $A_{n+k}A_{n+k+1}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $(A_{2n} \equiv A_0)$. *Да се докаже, че*

$$S < n\binom{n}{2}^2 \operatorname{cotg}\frac{\pi}{2n}.$$

Всяка задача се оценява с по 10 точки.

Време за работа – 4 астрономически часа.

ПОЖЕЛАВАМЕ ВИ УСПЕШНА РАБОТА!