МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР НА ВЕЛИКОТЪРНОВСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ
за ученици от 11 и 12 клас

ТЕМА ЗА ПЪРВО РАВНИЩЕ
9 март 2008 г.

ПЪРВА ЧАСТ

Всяка от следващите 20 задачи има точно един верен отговор. Отбележете с кръстче × *само този, който според вас е верен. За всеки верен отговор получавате по 2 точки. За грешен или непопълнен отговор, както и за посочени повече от един отговор на задача, точки не се дават и не се отнемат.*

1. Кое от неравенствата е вярно?

а) $\sqrt[3]{4} < \dfrac{1}{2}$ **б)** $0,3^0 < 3\dfrac{1}{3}$ **в)** $\dfrac{1}{\sqrt{3^2}} > \dfrac{1}{9^{-1}}$ **г)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} > 1$

2. Ако $a = \sqrt[3]{12+4\sqrt{5}}\,.\,\sqrt[3]{12-4\sqrt{5}}$, то:

а) $a = 1$ **б)** $a = 4$ **в)** $a = 7$ **г)** $a = 9$

3. Всички стойности на x, за които стойностите на изразите $2x+3$ и $3x+7$ са реципрочни числа са:

а) $\dfrac{4}{3}$ и $-\dfrac{5}{3}$ **б)** -2 и $-\dfrac{2}{3}$ **в)** $-\dfrac{4}{3}$ и $-\dfrac{5}{2}$ **г)** $\dfrac{2}{3}$ и $\dfrac{5}{3}$

4. Стойността на израза $\left(\left(\dfrac{1}{6}\right)^{-1} : \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\dfrac{3}{5}\right)^{-1}\right)^{-1}$ е:

а) 6 **б)** $\dfrac{1}{3}$ **в)** 9 **г)** -1

5. Изразът $\log_{\frac{1}{1-x}}(x+1)$ е дефиниран за:

а) $0 < x < 1$ **б)** $x > 0,\ x \neq 1$ **в)** $-1 < x < 1,\ x \neq 0$ **г)** $x < 0,\ x \neq -1$

6. Решение на неравенството $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-3} \leq 0$ е:

а) $x \in [2;3]$ **б)** $x \in (-\infty;2)\cup(3;+\infty)$ **в)** $x \in (-\infty;2]\cup[3;+\infty)$ **г)** $x \in (2;3)$

7. Ако x_1 и x_2 са корени на уравнението $2x^2-3x+1=0$, то стойността на израза $A = x_1^3\,x_2 + x_1\,x_2^3$ е:

а) $\dfrac{5}{8}$ **б)** 1 **в)** $-\dfrac{9}{8}$ **г)** $\dfrac{5}{2}$

8. Положителните числа $\sqrt{3}-1,\ x,\ \sqrt{3}+1$ образуват геометрична прогресия, ако x е равно на:

а) 1 **б)** $\sqrt{2}$ **в)** $\sqrt{3}$ **г)** 0

9. Корените на кое уравнение са реални и сумата им е по-голяма от тяхното произведение?

а) $x^2-4x+4=0$ **б)** $-2x^2+3x-4=0$ **в)** $5x^2-3x+2=0$ **г)** $3x^2-5x+2=0$

10. Точките $A(1;3)$ и $B(2;9)$ са от графиката на функцията:

а) $f(x)=x^2-3x+2$ **б)** $f(x)=3x^2+1$ **в)** $f(x)=2x^2+1$ **г)** $f(x)=2x^2-x+2$

11. Ако $\sin x+\cos x=a$, то изразът $\sin^3 x+\cos^3 x$ е равен на:

а) $\dfrac{3a^3+2}{2}$ **б)** $\dfrac{3a-a^3}{2}$ **в)** $\dfrac{3a^3-2a^2}{2}$ **г)** $\dfrac{3-3a^2}{2}$

12. Стойността на $\operatorname{tg} 15^\circ$ е:

а) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ **б)** $\dfrac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+1}$ **в)** $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ **г)** $\dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$

13. Решение на уравнението $\sqrt{8^x}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2^{x-1}}}$ е:

а) $\dfrac{2}{11}$ **б)** $-\dfrac{2}{11}$ **в)** $\dfrac{1}{11}$ **г)** 4

14. Решение на уравнението $3\log_3(x-1)-\log_3(x^2-1)=0$ е:

а) 3 **б)** 2 **в)** 4 **г)** няма решение

15. Ако височината на равностранен триъгълник е равна на 1, то лицето му е:

а) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ **б)** $\dfrac{1}{2}$ **в)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **г)** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

16. В триъгълника ABC са построени ъглополовящите AM и CH съответно на $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle ACB$ $(M\in BC, H\in AB)$. Известно е, че $AC=6$, $AH=2$ и $CM=3$. Дължините на AB и BC са:

а) $3,6$ и $4,8$ **б)** $3,8$ и $4,6$ **в)** 4 и 5 **г)** $3,8$ и 4

17. Периметърът на ромб е 24, а тъпият му ъгъл е 150°. Лицето на ромба е:

а) 8 **б)** 12 **в)** 18 **г)** 24

18. В равнобедрен триъгълник с бедро равно на 21 центърът на вписаната в него окръжност дели височината към основата в отношение 7:4, считано от върха. Периметърът на триъгълника е:

а) 63 **б)** 64 **в)** 65 **г)** 66

19. Основите на трапец са с дължини 10 и 15. Отношението, в което диагоналите на трапеца се делят от пресечната си точка е:

а) $2:5$ **б)** $3:5$ **в)** $1:3$ **г)** $2:3$

20. Броят на трицифрените числа, в чиито запис участват само цифрите 1, 3 и 5, без да се повтарят, е:

а) 3 **б)** 9 **в)** 6 **г)** 4

ВТОРА ЧАСТ

Следващите 5 задачи са със свободен отговор. В празните полета след всяка от тях запишете само отговора, който според вас е правилен. За всеки верен отговор получавате по 3 точки. За непопълнен, грешен или непълен отговор, както и при посочени повече от един отговор, между които е и верният, точки не се дават и не се отнемат.

1. Решение на неравенството $x^4 - 2x^3 - x + 2 < 0$ е: ....

2. Корените на уравнението $\sqrt{3x-2} - x = 1 - x\sqrt{3x-2}$ са: ....

3. Сборът на третия и деветия член на аритметична прогресия е 8. Сборът на първите единадесет члена на прогресията е: ....

4. В окръжност с диаметър AB е вписан трапец $ABCD$ с бедро 6 и диагонал 8. Радиусът на окръжността е: ....

5. В успоредник с периметър 64 са построени двата диагонала. Разликата между периметрите на два от получените съседни триъгълници е 8. Страните на успоредника са равни на: ....
....

ТРЕТА ЧАСТ

Представете решенията на следващите 3 задачи с необходимите обосновки в писмен вид. Пълното решение на всяка задача се оценява с 15 точки.

1. Да се реши системата

$$\left| \begin{array}{l} xy + x + y = 5 \\ x^2 + 3xy + y^2 = 11\,. \end{array} \right.$$

2. Да се намерят стойностите на реалния параметър m, за които уравнението
$2(m^2-1)x^2 + 4(m-1)x + 3 = 0$ няма реални корени.

3. В триъгълника ABC медианата AM и ъглополовящата BL са взаимно перпендикулярни и имат една и съща дължина, равна на 4. Да се намерят страните на $\triangle ABC$.

Максималният брой точки за целия тест е 100.

Време за работа – 4 астрономически часа.

ПОЖЕЛАВАМЕ ВИ УСПЕШНА РАБОТА!